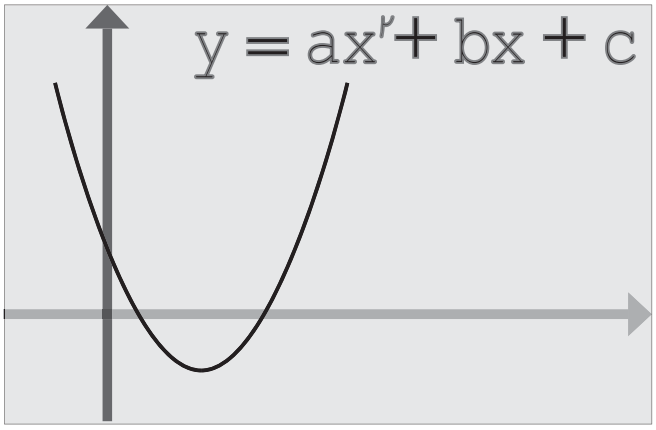
مسائل کلامی از معادلات درجهٔ دوم



عنایت‌اله راستی‌زاده*
دبیر ریاضی
دبیرستان‌های شیراز

کلیدواژه‌ها: مسائل کلامی، معادلهٔ درجهٔ دوم، قضیهٔ فیثاغورس

اشاره

طبق قرارداد، «مسائل کلامی» به مسائلی می‌گوییم که در آن‌ها مقدار قابل توجهی از اطلاعات به‌جای نمادگذاری‌های ریاضی، به‌صورت متن ارائه شده باشد. این مسائل غالباً شامل یک روایت یا داستان‌اند. هدف از طرح این مسائل در برنامهٔ درسی، ترویج مدل‌سازی ریاضی با طرح پرسش‌هایی از زندگی واقعی است. در واقع، به‌جای آنکه صرفاً مهارت دانش‌آموزان در دست‌ورزی جبری یا محاسبات مکانیکی مورد سنجش واقع شود، درک آنان از مفاهیمی که به‌صورت توصیفی در متن مسئله گنجانده شده است، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در طرح این‌گونه مسائل، به معلمان توصیه می‌شود که مسئلهٔ موردنظر تا حد امکان از دنیای واقعی اطراف دانش‌آموز گرفته شده باشد و فضای مطرح شده در مسئله حداکثر ارتباط را با زندگی روزمرهٔ او داشته باشد. چرا که زمینه و بافت آشنا برای دانش‌آموز، درک وی را از مسئله تسهیل خواهد کرد.

■ **مثال ۱. مینا** از برادر بزرگ‌ترش هزار تومان بیش از نصف پس‌انداز ماهانه‌اش و از برادر کوچک‌ترش هزار تومان بیشتر از $\frac{۱}{۷}$ پس‌انداز ماهانه‌اش عیدی گرفت. پدر گفت با حاصل‌ضرب این دو عدد می‌توان یک خودروی ملی خرید. مینا و برادرش گفتند: ۲۴ میلیون تومان برای خرید یک خودرو؟! حساب کنید پس‌انداز ماهانهٔ مینا (قبل از دریافت عیدی) چه‌قدر بوده است؟

● **پاسخ:** با فرض اینکه پس‌انداز ماهانهٔ مینا x تومان باشد، داریم:

$$(۱۰۰۰+\frac{x}{۲})(۱۰۰۰+\frac{x}{۷})=۲۴۰۰۰۰۰$$

$$\Rightarrow (۲۰۰۰+x)(۷۰۰۰+x)=۱۴\times۲۴\times۱۰^{۶}$$

$$x^{۲}+۹۰۰۰x-۱۴\times۲۳\times۱۰^{۶}=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱۴۰۰۰)(x+۲۳۰۰۰)=۰$$

که از آنجا جواب قابل قبول $x=۱۴۰۰۰$ به‌دست می‌آید.

در این صورت پس‌انداز ماهانهٔ مینا قبل از دریافت عیدی ۱۴ هزار تومان بوده است.

■ **مثال ۲.** اگر سن **محمود** ۹ سال دیگر مجذور سن ۳۳ سال قبل او شود، سن محمود را به‌دست آورید.

● **پاسخ:** سن کنونی محمود را x می‌گیریم. داریم:

$$x+۹=(x-۳۳)^{۲} \Rightarrow x^{۲}-۶۷x+۱۰۸۰=۰$$

ریشه‌های این معادله $x=۴۰$ و $x=۲۷$ هستند که فقط $x=۴۰$ قابل قبول است. (چرا؟)

مثال ۳. مربـــع عددی مثبت ۳۰۰ درصد بزرگ‌تر از خود آن است. این عدد را بیابید.

● **پاسخ:** عدد موردنظر را x می‌گیریم. در این صورت:

$x^۲=x+۳x \Rightarrow x^۲-۴x=۰ \Rightarrow x(x-۴)=۰$

جواب‌های این معادله $x=۴$ و $x=۰$ هستند که تنها $x=۴$ قابل قبول است. پس عدد موردنظر عدد ۴ است.

مثال ۴. طول یک زمین ورزشـــی مستطیل شکل ۱۰۰ متر و عرض آن نصف میانگین طول و قطر آن است. مساحت زمین را به‌دست آورید.

● **حل:** فرض کنید عرض زمین x متر باشـــد. در این صورت:

$$x=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۰۰+\sqrt{۱۰۰^۲+x^۲}}{۲} \Rightarrow (۴x-۱۰۰)^۲=۱۰۰^۲+x^۲$$

$$\Rightarrow ۱۵x^۲-۸۰۰x=۰ \Rightarrow x\approx ۵۳/۳۳۳$$

بنابراین مســـاحت زمین تقریباً ۵۳۳۳/۳ متر مربع است.

مثال ۵. طول یک زمین ورزش از سه برابر عرض آن ۲ واحد کمتر است. ابعاد زمین ورزش را تعیین کنید، در صورتی‌که مساحت آن ۶۵ مترمربع باشد.

● **حل:**

$a=۳b-۲,\ ab=۶۵ \Rightarrow b(۳b-۲)=۶۵$

$\Rightarrow ۳b^۲-۲b-۶۵=۰$

$\Rightarrow b=۵\ ,\ a=۱۳$

مثال ۶. دو عدد صحیح زوج متوالی بیابید به‌طوری که مربع عـــدد کوچک‌تر ۱۰ واحد بیشـــتر از عدد بزرگ‌تر باشد.

● **حل:** اگر n و $n+۲$ این دو عدد باشند، در این صورت داریم:

$n^۲=۱۰+(n+۲) \Rightarrow n^۲-n-۱۲=۰$

$\Rightarrow (n-۴)(n+۳)=۰$

پـــس این دو عدد ۴ و ۶ هســـتند. توجه کنید که $n=-۳$ قابل قبول نیست. (چرا؟)

مثال ۷. ســـه عدد صحیح متوالی تعیین کنید که چهار برابر مجموع هر سهٔ آن‌ها دو برابر حاصل‌ضرب دو عدد بزرگ‌تر باشد.

● **حل:** فرض کنیم $n-۱$ ، n و $n+۱$ این سه عدد باشند.

در این صورت داریم:

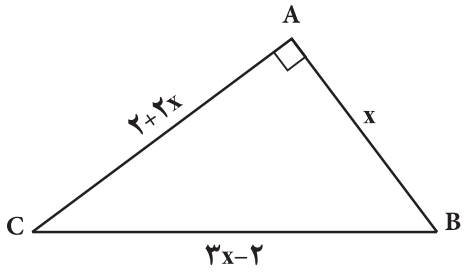
$۴(n+۱+n+n-۱)=۲(n+۱)(n)$

$\Rightarrow ۴(۳n)=۲(n^۲+n)$

$\Rightarrow n^۲-۵n=۰ \Rightarrow n=۰,\ n=۵$

پس جواب‌هـــا می‌توانند $\{-۱,۰,۱\}$ یـــا $\{۴,۵,۶\}$ باشند.

مثال ۸. در یـــک مثلث قائم‌الزاویـــه اندازهٔ ضلع بزرگ‌تر دو سانتی‌متر بیشتر از دو برابر طول ضلع کوچک‌تر است. اگر وتر مثلث دو سانتی‌متر کمتر از سه برابر طول ضلع کوچک‌تر باشد، اندازهٔ وتر را بیابید.



● **حل:**

$AC=۲+۲AB,\ BC=۳AB-۲,\ AB=x$

در این صورت داریم:

$AC=۲+۲x\ ,\ BC=۳x-۲,\ BC^۲=AB^۲+AC^۲$

پس:

$(۳x-۲)^۲=x^۲+(۲+۲x)^۲$

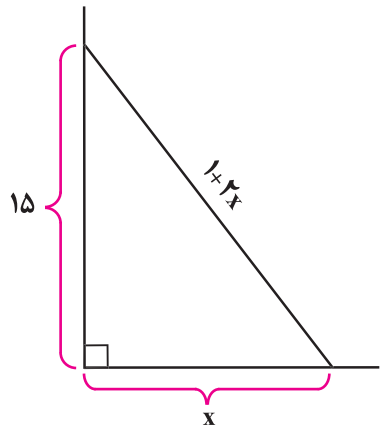
$\Rightarrow ۹x^۲-۱۲x+۴=x^۲+۴+۴x^۲+۸x$

$\Rightarrow ۴x^۲-۲۰x=۰ \Rightarrow x=۰\ ,\ x=۵$

که $x=۵$ قابل قبول است. در این صورت اندازهٔ وتر ۱۳ سانتی‌متر خواهد بود.

مثال ۹. نردبانی به یک دیوار تکیه داده شده است. بالای نردبان در ارتفاع ۱۵ متری با دیوار تماس پیدا کرده است. فاصلهٔ دیوار تا پایین نردبان را پیدا کنید، هـــرگاه طول نردبان یک متر بیشـــتر از دو برابر این فاصله باشد.

● **حل:** فاصلهٔ دیوار تا پایین نردبان را با x نشان می‌دهیم. در این صورت طبق قضیهٔ فیثاغورس خواهیم داشت:

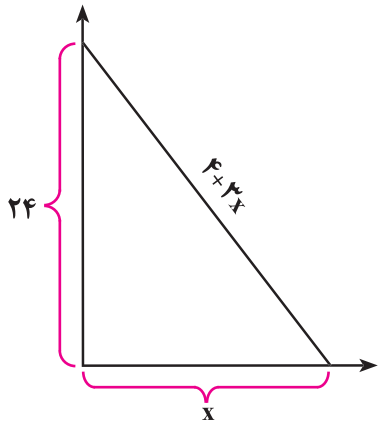


$$x^2+15^2=(1+2x)^2$$

و در نتیجه: $3x^2+4x-224=0 \Rightarrow x=8$

■ **مثال ۱۰.** دو خودرو از یک تقاطع شـــروع به حرکت می‌کنند. خودروی الف به سمت شمال و خودروی ب به سمت شرق می‌رود. هنگامی که خودروی الف ۲۴ کیلومتر را طی کرده بود، فاصلهٔ بین دو خودرو چهار کیلومتر بیشتر از سه برابر مسافتی بود که خودروی ب طـــی کرده بود. فاصلهٔ بین دو خـــودرو را در این موقعیت محاسبه کنید.

● **حل:** به یاری مثلث قائم‌الزاویه می‌توان معادلهٔ مرتبط با این مسئله را تشکیل داد.



$$(4+3x)^2=x^2+24^2 \Rightarrow 16+9x^2+24x=x^2+576$$
$$\Rightarrow x^2+3x-70=0 \Rightarrow x=-10\ ,\ x=7$$

که $x=7$ قابل قبول است. در این صورت فاصلهٔ دو خودرو ۲۵ کیلومتر خواهد بود.

۱. طول یک مستطیل چهار برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۱۴۴ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد مستطیل را محاسبه کنید.

۲. حاصل‌ضرب دو عدد صحیح فرد متوالی یک واحد کمتر از دو برابر حاصل‌جمع آن‌هاست. آن‌ها را بیابید.

۳. سه عدد صحیح متوالی بیابید که سه برابر حاصل‌جمع آن‌ها برابر با حاصل‌ضرب دو عدد بزرگ‌تر باشد.

۴. وتر یک مثلث قائم‌الزاویه یک سانتی‌متر بزرگ‌تر از ضلع بزرگ‌تر آن است. ضلع کوچک‌تر مثلث ۷ سانتی‌متر کوچک‌تر از ضلع بزرگ‌تر است. اندازهٔ وتر و اضلاع را بیابید.

۵. دو موتورسیکلت الف و ب از یک تقاطع شروع به حرکت می‌کنند. الف به سمت جنوب و ب به سمت غرب می‌رود. هنگامی که موتورســـیکلت الف ۱۲ کیلومتر را طی کرد، فاصلهٔ بین این دو موتورسیکلت ۳ کیلومتر بیشتر از دو برابر مسافتی بود که موتورسوار ب در سمت غرب طی کرده بود. فاصلهٔ بین دو موتورسوار را در این موقعیت تعیین کنید.

جواب‌ها

۵) ۱۲ کیلومتر

۴) $\{8,7,6\}$ و $\{-1,0,1\}$

۳) ۵، ۱۳ و ۱۳

۲) «۳،۵» و «-۱،۱»

۱) $AB=6$ و $BC=8$

* erastizadeh@yahoo.com